Introducción a la teoría de óperads.

Un enfoque combinatorio

Pares ordenados

Jonathan Torres Cardenas

Asesor: Eric Dolores Cuenca

31 de Mayo 2024

Una óperad es una colección de conjuntos $\{O(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ junto con reglas de composición $\circ_i$ tales que $\circ_i : O(n) \times O(m) \to O(n+m-1)$, y una operación identidad $1 \in O(1)$.

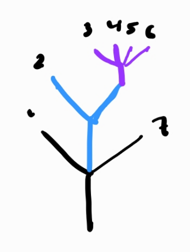

Figura: Composición de óperads

Composición

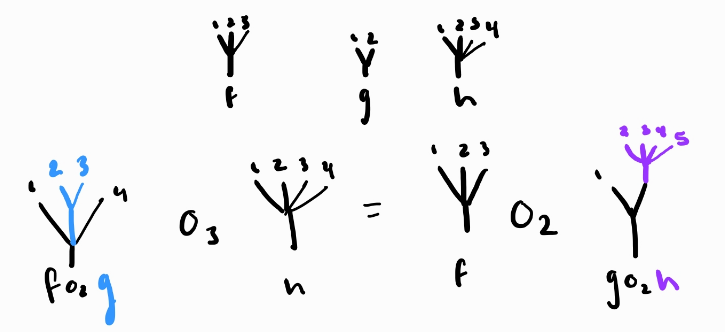

Figura: Composición de óperads

Ejemplo

La óperad de endomorfismos, dado un conjunto X definimos $End_X = \{End_X(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $End_X(n)$ denota el conjunto de funciones de X^n a X, bajo la operación de composición usual de funciones.

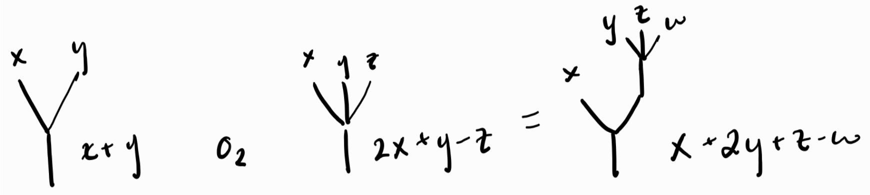

Figura: Composición de funciones

Álgebra sobre una óperad

Una álgebra o representación sobre la óperad es un conjunto X y una colección de funciones $\phi_n : O(n) \to End_X(n)$, que respeta las operaciones de composición y a la identidad. Esto es, $\phi_1(1) = 1$ y :

$$\phi_{n+m-1}(p \circ_i q) = \phi_n(p) \circ_i \phi_m(q)$$

Para todo $p \in O(n)$, $q \in O(m)$ y $1 \leq i \leq n$.

Óperad de los posets finitos

Un poset (partial ordered set) es un par $(A, <)$, donde A es un conjunto y $<$ es una relación de orden estricta, es decir, es antisimétrica y transitiva.

1. $\{x < y < w, x < z < w\}$
2. $\{x < y, z < w, z < u\}$
3. $\langle n \rangle = \{1 < 2 < ... < n\}$

Es un grafo dirigido (A, E), donde A el conjunto de vértices y $E = \{(p, q) \in A|\ p < q$ y no existe $r \in A$ con $p < r < q\}$ es el conjunto de aristas.

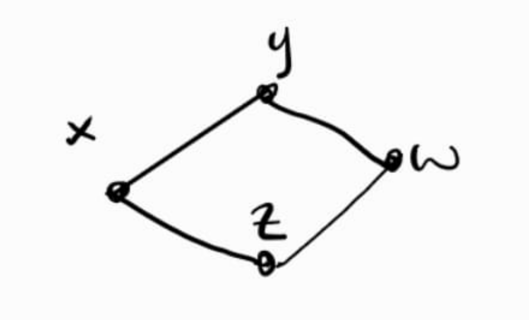

Figura: Diagrama ejemplo 1

Óperad de posets finitos

Los posets forman una óperad al insertar un poset en lugar de un elemento de otro.

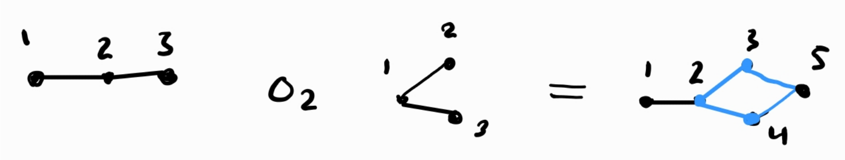

Figura: Composición de posets

Una función $f : P \to Q$ entre 2 posets $(P, <_P)$ y $(Q, <_Q)$ se dice que preserva el orden si $f(x) <_Q f(y)$ cuando $x <_P y$. Una pregunta natural es ¿cuántas funciones $f : P \to \langle n \rangle$ que preservan el orden hay?

1. Si P es el poset de la figura 1, entonces hay 20 funciones $f : P \to \langle 5 \rangle$ que preservan el orden.
2. Si P es el poset de la figura 2, entonces hay 450 funciones $f : P \to \langle 6 \rangle$ que preservan el orden.
3. Si $f : \langle m \rangle \to \langle n \rangle$ con $m < n$, hay exactamente $\binom{n}{m}$.

Para el estudio del comportamiento del conjunto de funciones que preservan el orden, es útil el uso de funciones generadoras. La función generatriz de la sucesión $(\Omega^\circ(n))_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\Omega^\circ(n)$ representa la cardinalidad del conjunto A_n, llamada la serie estricta de orden de X.

$$\zeta(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega^\circ(X)(n)x^n$$

En el caso de cadenas $\langle n\rangle$, tenemos el siguiente resultado:

$$\zeta(n) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}$$

Operaciones en posets

Dado dos posets P, Q, definimos dos operaciones:

La concatenación $P * Q = (P \cup Q, <)$, donde $u < v$ si $u, v \in P$ y $u <_P v$ o $u, v \in Q$ y $u <_Q v$ y además, si $u \in P$ entonces $u < v$ para todo $v \in Q$. Y la unión disjunta de dos posets, $P \sqcup Q = (P \sqcup Q, <)$, donde $u < v$ si $u, v \in P$ y $u <_P v$ o $u, v \in Q$ y $u <_Q v$, esto es, consiste en el poset cuyo diagrama de hasse es la unión de grafos de los diagramas de hasse de P y Q.

Ejemplo

De estas operaciones podemos generar posets extensos a partir del más simple posible, $\langle 1 \rangle$.

Figura: Operaciones en posets

Resultados

Podemos hacer coincidir a las series generadoras con las operación de concatenación con la siguiente definición:

$$\zeta(X) * \zeta(Y) = \zeta(X)\zeta(Y)(1 - x)$$

Los siguientes resultados permiten calcular las series de orden de posets de forma práctica:

1. $\zeta(\langle n \rangle) * \zeta(\langle m \rangle) = \zeta(\langle n \rangle * \langle m \rangle) = \zeta(\langle n \rangle)(1 - x)\zeta(\langle m \rangle)$
2. $\zeta(\langle n \rangle) \sqcup \zeta(\langle m \rangle) = \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{n} \binom{n}{k} \zeta(\langle n + m \rangle)$

Sea P el poset del ejemplo 1, note que $P = \langle 1\rangle * (\langle 1\rangle \sqcup \langle 1\rangle) * \langle 1\rangle$, por lo que podemos calcular su serie de orden estricta:

$$\begin{aligned}
\zeta(P) &= \zeta(\langle 1\rangle) * \zeta(((\langle 1\rangle \sqcup \langle 1\rangle) * \langle 1\rangle) \\
&= \frac{x}{1-x}\left(\zeta(\langle 1\rangle \sqcup \langle 1\rangle)\,\frac{x}{1-x}\right) \\
&= \frac{x^2}{(1-x)^2}\left(\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3}\right) \\
&= \zeta(\langle 3\rangle) + 2\zeta(\langle 4\rangle) \\
&= (x^3 + 4x^4 + 10x^5 + \ldots) + 2(x^4 + 5x^5 + \ldots) \\
&= x^3 + 4x^4 + 20x^5 + \ldots
\end{aligned}$$

Referencias

1. José Antonio Arciniega-Nev arez, Marko Berghoff, and Eric Rubiel Dolores-Cuenca. An algebra over the operad of posets and structural binomial identities. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, 29(1):8, 2023
2. Tai-Danae Bradley. Entropy as a topological operad derivation. Entropy, 23(9):1195, 2021

Referencias

3. Bernd Siegfried Walter Schr oder. Ordered sets: An introduction with connections from combinatorics to topology. Springer, 2016.
4. Richard P Stanley. A chromatic-like polynomial for ordered sets. In Proc. Second Chapel Hill Conf. on Combina- torial Mathematics and its Applications (Univ. North Carolina, Chapel Hill, NC, 1970), Univ. North Carolina, Chapel Hill, NC, pages 421–427, 1970